Gourdon - Tosel
Calcul Diff p 64

Developpement :

Théorème du point fixe de Brouwer :

Leçons 203
204
214
215

Théorème :

Toute application continue de la boule unitée fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle même admet un point fixe.

Supposons par l'absurde qu'il existe $f : B^n \to B^n$ continue sans point fixe.

▶ 1 : On se ramène au cas où f est $\mathcal{C}^1$:

Comme B^n est compacte, on fixe $\varepsilon > 0$ tq $\forall x \in B^n$, $\|f(x) - x\| > \varepsilon$.

Par Stone-Weierstrass, on fixe $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont polynomiales tq $\|f - P\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\forall x \in B^n$, on a $\|P(x)\| \leq \|P(x) - f(x)\| + \|f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 1$

Posons $Q = \frac{1}{\frac{\varepsilon}{2} + 1} P$, qui est $\mathcal{C}^1$ et vérifie $Q(B^n) \subset B^n$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in B^n, \quad \|Q(x) - f(x)\| &\leq \|Q(x) - P(x)\| + \|P(x) - f(x)\| \\
&\leq \left(1 - \frac{1}{\frac{\varepsilon}{2} + 1}\right) \|P(x)\| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

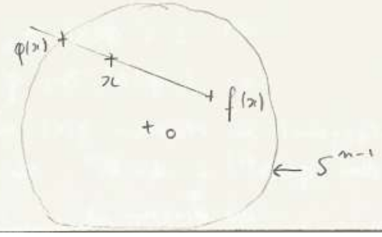
donc $\|Q(x) - x\| \geq \|f(x) - x\| - \|Q(x) - f(x)\| > 0$, et Q n'a pas de point fixe.

Remarque : Nous venons de prouver que "$\exists f$ continue sans pt fixe $\Rightarrow \exists Q$ $\mathcal{C}^1$ sans pt fixe" ce qui est équivalent par contraposée à "$\nexists Q$ $\mathcal{C}^1$ sans pt fixe $\Rightarrow \nexists f$ continue sans pt fixe". Il suffit donc de prouver le théorème pour les fonctions $\mathcal{C}^1$.

On suppose donc f de classe $\mathcal{C}^1$:

▶ 2 : Mq $\exists\, \varphi : B^n \to S^{n-1}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tq $\varphi_{|S^{n-1}} = Id_{S^{n-1}}$.

Pour tout $x \in B^n$, on note $\varphi(x)$ le point d'intersection de $[f(x), x)$ et de S^{n-1} :



On a que $\varphi(x) = f(x) + \lambda(x).(x - f(x))$, avec $\lambda(x) \geq 0$.

et donc $\| f(x) + \lambda(x).(x - f(x)) \|^2 = 1$

ce qui donne $\| f(x) \|^2 + 2\lambda(x). \langle f(x), x - f(x) \rangle + \lambda(x)^2 . \| x - f(x) \|^2 = 1$

et donc $\lambda(x) = \dfrac{- \langle f(x), x - f(x) \rangle + \sqrt{\Delta(x)}}{\| x - f(x) \|^2}$ ← résolution de pol du 2nd degré en $\lambda(x)$, et on a gardé que la racine positive car $\lambda(x) > 0$.

avec $\Delta(x) = \langle f(x), x - f(x) \rangle^2 + \| x - f(x) \|^2 (1 - \| f(x) \|^2) > 0$.

Alors φ est C^1 sur B^n, car λ est C^1 sur B^n. On a de plus $\varphi_{|S^{n-1}} = Id_{S^{n-1}}$ par construction.

▶3 On introduit le polynôme P :

* $\forall t \in [0,1]$, on pose $\varphi_t : B^n \longrightarrow B^n$
$x \longmapsto (1-t)x + t\,\varphi(x)$ $\qquad \varphi_1(x) = \varphi(x)$

et on définit le polynôme (en t) $P(t) = \int_{B^n} \det J_{\varphi_t} \, d\lambda(x)$ ← mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

rem : si dans l'intégrale on avait une valeur absolue, on pourrait interpréter comme le volume de la boule $\varphi_t(B^n)$. Mais par là.

$\forall x \in B^n$, on a $\| \varphi(x) \|^2 = 1$. Par différentiation de la composée, on a alors $\langle \varphi(x), D_x\varphi(h) \rangle \overset{(1)}{=} 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$. Donc $\mathrm{Im}\, D_x\varphi \subset \varphi(x)^\perp$, donc(2) $D_x\varphi$ non inversible, ce qui donne $\det J_{\varphi_1}(x) = 0$, et donc $\boxed{P(1) = 0}$

* Nous allons mq φ_t injective pour t assez petit :

Soit $t \in [0,1]$, $x, y \in B^n$ tq $\varphi_t(x) = \varphi_t(y)$. Alors on a $(1-t).\| x - y \| = t.\| \varphi(x) - \varphi(y) \|$. Comme φ est C^1, le TAF donne $\| \varphi(x) - \varphi(y) \| \leq M.\| x - y \|$, avec $M = \sup_{z \in B^n} \| D_z\varphi \| < +\infty$

On a alors $\| x - y \| \leq \frac{Mt}{1-t} \| x - y \|$ d'où $x = y$ si $t < \frac{1}{1+M} := \alpha$

Ainsi φ_t injective pour $t < \alpha$. On, $\forall t < \alpha$, $\forall x \in S^{n-1}$, $\varphi_t(x) = x$

---

(1) $\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow D_{\varphi(x)} \langle a, a \rangle \circ D_x\varphi = 0$ $\quad$ } La diff du produit scalaire vaut $2\langle x, h \rangle$
$\Rightarrow 2 \langle \varphi(x), D_x\varphi \rangle = 0$
$\Rightarrow \langle \varphi(x), D_x\varphi \rangle = 0$

(2) $D_x\varphi$ dans l'orthogonal du vecteur $\varphi(x)$ non nul.
$\dim(\mathrm{Im}(D_x\varphi)) \leq \dim(\varphi(x)^\perp) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } \varphi(x) \text{ non nul}}}{<} \dim \mathbb{R}^n$ et donc $\dim(\mathrm{Im}(D_x\varphi)) < n$, i.e. $D_x\varphi$ non inversible.

donc $\varphi_t(\mathring{B}^n) \subset \mathring{B}^n$ par injectivité de φ_t.

* $\forall t < \alpha$, $\forall x \in B^n$, $\det J_{\varphi_t}(x) = a_n(x) t^n + \dots + a_1(x) t + \underbrace{a_0(x)}_{= \delta \text{ avec } \delta = \int_{\mathring{B}^n} 1 \, d\lambda(x)}$

où les a_i sont continus sur B^n. On pose $m = \sup_{\substack{x \in B^n \\ t \in [0,1]}} |a_n(x) t^{n-1} + \dots + a_1(x)|$

et alors pour $t < \beta := \min(\alpha, \frac{\delta}{m})$, on a $|a_n(x).t^n + \dots + a_1(x) t| < \delta$

et donc $J_{\varphi_t}(x) > 0$. Par inversion globale, φ_t est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathring{B}^n$ sur l'ouvert $\varphi_t(\mathring{B}^n)$ pour $t < \beta$, tel que $\det J_{\varphi_t}(x) > 0$ sur $\mathring{B}^n$.

* Nous allons montrer que $\varphi_t(\mathring{B}^n) = \mathring{B}^n$. On sait déjà par le point ci-dessus que $\varphi_t(\mathring{B}^n)$ est un ouvert de $\mathring{B}^n$. Soit à présent une suite (y_k) d'éléments de $\varphi_t(\mathring{B}^n)$, avec $y_k \longrightarrow y \in \mathring{B}^n$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,
(On veut $y \in \varphi(\mathring{B}^n)$)
on écrit $y_k = \varphi_t(x_k)$, $x_k \in \mathring{B}^n$. Par compacité de B^n, on fixe une extraction σ tq $x_{\sigma(k)} \longrightarrow x \in B^n$. Par continuité, on a $y = \varphi_t(x)$. Si $t < \beta$, on a $x \notin S^{n-1}$ par injectivité de φ_t donc $x \in \mathring{B}^n$. Ainsi $\varphi_t(\mathring{B}^n)$ fermé, donc $\varphi_t(\mathring{B}^n) = \mathring{B}^n$ par connexité.

* $\forall t < \beta$, on a
$$
\begin{aligned}
P(t) &= \int_{\mathring{B}^n} \det J_{\varphi_t}(x) \, d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathring{B}^n} |\det J_{\varphi_t}(x)| \, d\lambda(x) && \text{car } \det J_{\varphi_t}(x) > 0 \\
&= \int_{\mathring{B}^n} d\lambda(x) && \text{par changement de variable } \hookrightarrow y = \varphi_t(x) \\
&= \lambda(\mathring{B}^n)
\end{aligned}
$$

donc P est constant égal à $\lambda(\mathring{B}^n)$, ce qui est absurde car $P(1) = 0$ ∎